L'algèbre de Jacopo de Florence

un défi à l'histoirographie de l'algèbre presque-moderne

Høyrup, Jens

Published in:
Actes du 7ème Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes

Publication date:
2005

Document Version
Tidlig version også kaldet pre-print

Citation for published version (APA):
Høyrup, J. (2005). L'algèbre de Jacopo de Florence: un défi à l'histoirographie de l'algèbre presque-moderne. In A. A. El idrissi, & E. Laabid (Eds.), *Actes du 7ème Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes: mathématiques, mathématiques appliqués, histoire et enseignement des mathématiques, astronomie, mathématiques et société. Marrakech, 30 mai - 2 juin 2002* (Vol. I, pp. 217-239). Ministère de l'Éducation Nationale.

L'Algèbre de Jacopo de Florence: un défi à l'historiographie de l'algèbre presque-moderne

Jens Høyrup

Contribution au
7ème colloque maghrébin d'histoire des mathématiques arabes
Marrakesh, 30 mai au 1er juin 2002

Version préliminaire

Une histoire bien enracinée mais erronée

Depuis longtemps, l'histoire de l'arrivée de l'algèbre en l'Europe chrétien se présume bien connue: au douzième siècle, l'algèbre d'al-Khwārizmī était traduite de l'arabe en latin, d'abord par Robert de Chester, plus tard par Gérard de Crémone. Au début du treizième, Léonard de Pise l'inclut dans son *Liber abbaci* (et, ce dont on parle moins, dans sa *Pratica geometrie*). Le *Liber abbaci*, à son tour, allait inspirer l'algèbre des «écoles d'abaque» italiennes et, à travers celle-ci, les ouvrages imprimés de Luca Pacioli et Cardan.[1]

Racontée ainsi, l'histoire devient simple et presque linéaire, et de surcroît très commode: pour connaître l'origine de l'algèbre moderne il suffit prendre en considération la première partie du traité d'al-Khwārizmī; tout ce que les autres auteurs arabes ont fait et écrit sur le sujet peut être intéressant pour ceux qui travaillent sur l'histoire des mathématiques arabes – mais pour les autres cela reste un cul de sac, un réseau de routes menant nulle part et donc sans effets sur la «grande histoire».

Malheureusement, cette histoire est fausse, comme le démontrera une analyse approfondie de la première algèbre européenne connue en langue vulgaire (à savoir italien toscan). Les acteurs susmentionnés resteront sur la scène, mais la trame sera changée; en plus, l'analyse révélera la présence d'un protagoniste jusqu'ici inconnu œuvrant derrière les coulisses.

Cette algèbre fait part d'un *Tractatus algorismi* écrit par un certain Jacopo de Florence en Montpellier en 1307, et se trouve dans une copie de ce traité contenu dans le manuscrit Vat. Lat. 4826 (ci-après **V**), faite par une seule main assez scrupuleuse aux environs de 1450.[2] Deux autres manuscrits du même traité – Riccardiana Ms. n. 2236 (Florence; ci-après **F**)[3] et Trivulziana n. 90 (Milan; ci-après **M**; écrit aux environs de 1410)[4] omettent le chapitre sur l'algèbre; au fait ils suppriment toutes les matières qui n'entrent pas dans le cursus ordinaire de l'école d'abaque tel que celui-ci nous est parvenu à travers un manuscrit florentin du quinzième siècle publié par Gino Arrighi [1967]. L'hypothèse inverse,

---

1 L'algèbre d'Abū Kāmil a bien été traduite en latin elle aussi, mais au quatorzième siècle, comme le démontre Jacques Sesiano [1993: 315*f*], et apparemment sans avoir trouvé un nombre appréciable de lecteurs. Elle est donc absente de l'histoire pour de bonnes raisons.

2 Datation de Warren Van Egmond [1980: 224], basée sur les empreintes dans la pâte.

3 Éd. [Simi 1995].

4 Décrit dans [Van Egmond 1980: 166*f*].

c’est-à-dire que **V** serait une version élargie d’un noyau originel représenté par **F** et **M** est en désaccord avec ce que révèle une analyse comparée des textes.[5] Par exemple, **V** aussi bien que **F** contiennent des références à des figures, qui pourtant dans un cas se trouve seulement en **V**, et qui dans un autre corréspond au texte dans **V** mais est une fantaisie pure en **F**. En outre, le texte de **F** contient des incohérences qui ne s’expliquent que comme les résultats d’une réécriture parfois mal réussie.

F pourrait être encore une réécriture d’un traité primitif bref, et **V** une version élargie par une algèbre (et d’autres matières). Même cela, pourtant, se révèle une hypothèse intenable: toute une série de particularités textuelles et de méthode caractérisent **V** en son ensemble, se trouvant aussi bien dans la partie répétée par **F** que dans les parties qui auraient été ajoutées. Ces particularités ont été à peu près éliminées dans **F** durant la réécriture, mais pas sans laisser des traces. **F** doit donc être dérivé d’une version du traité qui contenait déjà tous les chapitres de **V**. Puisque cette version existait déjà bien avant 1328 (voir plus loin), il n’y a aucune raison de la croire différente de la version originale écrite en 1307, ni de croire son algèbre ajouté par une seconde main.

Si l’histoire consacrée était vraie, l’algèbre de Jacopo devrait donc être similaire à celles d’al-Khwārizmī et de Léonard. Mais elle ne l’est pas. L’histoire devrait donc être à refaire.

L’algèbre de Jacopo, et les autres

Quatre différences entre l’algèbre de Jacopo et les prédécesseurs latins sautent aux yeux dès qu’on commence à lire dans le manuscrit.

D’abord, l’algèbre de Jacopo contient des règles formulées en termes d’*avoirs* (*censi*, arabe *amwāl*), *racines* carrées de ceux-ci et de *nombres*, suivi par des exemples qui mettent les règles en œuvre; mais ces exemples ne traitent jamais de *censi* etc. comme le font les premières illustrations chez al-Khwārizmī. Une inspection plus précise révèle que pas un seul des problèmes de Jacopo se retrouve dans les traités latins.

Ensuite, Jacopo ne donne pas de démonstrations géométriques des règles comme le font al-Khwārizmī aussi bien que Léonard, en dépit d’un effort marqué de sa part de produire des explications pédagogiques.

Encore, toutes les règles de Jacopo se rapportent aux cas non-normalisés, tandis que celles des algèbres latines sont normalisés, avec la règle pour le

[5] Voir [Høyrup 2001], où tous les arguments esquissés dans le paragraphe présent et celui qui suit sont expliqués en plein détail.

premier degré (où le problème normalisé serait déjà sa propre solution) comme seule exception.[6]

Finalement, l'ordre des cas chez Jacopo diffère de celui des traités latins. Dans les traités d'al-Khwārizmī et d'Abū Kāmil (originaux aussi bien que traductions), l'ordre est la suivante:

(1) $C = \beta r$	(4) $C+\alpha r = n$
(2) $C = n$	(5) $C+n = \beta r$
(3) $\alpha r = n$	(6) $\beta r+n = C$

(C = *census*, r = *radix*, n = *numerus*). Avec la même numération, l'ordre du *Liber abbaci* est 1–2–3–4–6–5, tandis que celle de Jacopo est 3–2–1–4–5–6.

Une comparaison avec une sélection d'autres traités d'algèbre arabes sera informative. Faisons-la point par point.

Les exemples formulés en termes d'*avoirs* et de *racines* se trouvent non seulement chez al-Khwārizmī mais aussi chez Abū Kāmil, dans le *Kāfī* d'al-Karajī [éd., trad. Hochheim 1878], dans le *Kašf* d'al-Qalaṣādī [éd., trad. Souissi 1988] et chez ibn Badr [éd., trad. Sánchez Pérez 1916]. La breve section sur l'algèbre dans le *Talkhīṣ* d'ibn al-Bannā᾿ [éd., trad. Souissi 1969] ne contient pas d'exemples; al-Khayyāmī [éd., trad. Rashed & Djebbar 1981] formule le cas (4) à travers l'exemple paradigmatique d'al-Khwārizmī, mais reste abstrait pour les autres. Entre les traités que j'ai sous main, celui de Bahāʿ al-Dīn al-ʿĀmulī (ou al-ʿĀmilī) [éd., trad. Nesselmann 1843] est le seul à ne pas contenir des exemples basés sur l'avoir et les racines.[7]

Les démonstrations géométriques des régles pour les cas (4)–(6) se trouvent chez al-Khwārizmī et ibn Turk, chez Abū Kāmil (qui en ajoute de nouveaux), dans le *Fakhrī* d'al-Karajī, et chez al-Khayyāmī. Elles sont absentes du *Kāfī* et

[6] Ceci ne veut pas dire que l'algèbre d'al-Khwārizmī n'enseigne pas comment traiter les cas non-normalisés; mais cet enseignement se fait hors des règles.

Comme nous le verrons, le manuscrit arabe de l'algèbre d'al-Khwārizmī publié par Mušarrafa & Ahmad [1939] définit les cas en version non-normalisée, bien que les règles présupposent des équations normalisées. Pourtant, la précision grammaticale de la traduction de Gérard de Crémone à d'autres égards nous garantit que cette caractéristique du texte arabe al-Khwārizmien est une innovation. Au fait, une comparaison de la version arabe avec les traductions de Gérard et de Robert de Chester démontre que le texte arabe publié a été soumis à au moins trois révisions successives – voir [Høyrup 1998].

[7] Les traités d'ibn Turk [éd., trad. Sayılı 1962] et de Thābit ibn Qurrah [éd., trad. Luckey 1941] ne sont pas des présentations de l'algèbre au sens propre du mot mais des examens critiques de ses fondements; on peut observer, pourtant, que le premier se réfère à des exemples spécifiques du type avoir-racine-nombre, tandis que le second est totalement abstrait.

des traités d'ibn al-Bannāʿ, d'al-Qalaṣādī, d'ibn Badr et de Bahāʾ al-Dīn.

Le texte primitif d'al-Khwārizmī définit les cas en forme normalisée et donnent les règles correspondants. La même situation se retrouve chez d'Abū Kāmil et dans les traités d'ibn Turk, de Thābit et d'al-Khayyāmī. Le *Kâfī* nous confronte avec une situation mixte: les trois cas simples sont non-normalisés (définitions aussi bien que règles); le cas (4) est défini en forme non-normalisée, mais la règle présuppose une équation normalisée; les cas (5) et (6) sont présentés à travers des exemples paradigmatiques normalisés, et les règles présupposent cette normalisation. Dans le *Talkhīṣ* et le *Kašf*, les cas simples (1–3) sont traités de même; pour les cas composés (4–6), aucune définition explicite est donnée, mais les règles présupposent encore la normalisation. Ibn Badr définit tous les cas en forme non-normalisé, et donne des règles correspondants pour les cas simples; pour les cas composés, ses règles présupposent la normalisation.[8] Seulement Bahāʾ al-Dīn présuppose la situation non-normalisée partout.

En ce qui concerne l'ordre des cas, celui d'al-Khwārizmī et d'Abū Kāmil était présenté plus haut. Elle peut être regardée comme l'ordre «classique», et se retrouve chez Thābit (seulement 4–5–6); chez ibn Turk (seulement 1–4–5–6); dans le *Talkhīṣ* et le *Kašf*; dans le ʿ*Urjuza fi'l-jabr wa'l-muqābalah* d'ibn al-Yāsamīn (voir [Souissi 1983: 220–223]).

Pourtant, chez al-Karajī – dans le *Kāfī* aussi bien que dans le *Fakhrī* – on trouve la séquence 3–1–2–4–5–6; elle se trouve aussi chez al-Samawʾal et al-Kāšī [Djebbar 1981: 60*f*] et chez Bahāʿ al-Dīn. Ibn al-Bannāʾ, dans la solution des équations, suit l'ordre 1–2–3–4–6–5 (celui du *Liber abbaci*).

Le commentaire d'al-Māridīnī à l'ʿ*Urjūza* d'ibn al-Yāsamīn (c. 1500) parle de l'ordre de Jacopo comme celui qu'on suit «en Orient» [Souissi 1983: 220]; en effet, c'est l'ordre suivi par al-Miṣṣīṣī, al-Bīrūnī, al-Khayyāmī et Šaraf al-Dīn al-Ṭūsī [Djebbar 1981: 60]. Mais elle se trouve aussi au Maghreb, à savoir chez al-Qurašī (né en Andalousie au treizième siècle, actif en Bugie) [Djebbar 1988: 107].

Le traité de Jacopo est donc non seulement très loin des prédécesseurs latins; elle se distingue aussi assez nettement du grand courant maghrébin.[9] À certains

---

8 Le texte arabe publié d'al-Khwārizmī est similaire en ce regard aux textes d'ibn al-Bannāʾ, al-Qalaṣādī et ibn Badr.

9 On peut ajouter qu'une règle mnémotechnique très commode et partagée par ibn al-Bannāʾ, al-Qalaṣādī et ibn Badr (à savoir que dans le quatrième cas c'est le nombre qui est isolé, dans le cinquième c'est la racine, et dans le sixième c'est l'avoir) est absente du traité de Jacopo et, si je me souviens bien, de tous les traités d'abaque que j'ai examinés.

égards, le parent plus proche semble être l'ouvrage de Bahāʿ al-Dīn, écrit environ trois siècles plus tard.

Ceci pose un problème sérieux pour l'historiographie des mathématiques arabes: Où sont les sources qui relient le traité de Bahāʿ al-Dīn à celui de Jacopo? De quel type d'institution dépendent-elles, à quel type de transmission devons-nous penser? Mais puisque Jacopo inaugure une tradition qui sera peut-être plus importante pour la nouvelle algèbre du seizième siècle que l'héritage latine, il pose aussi un problème en ce qui concerne l'origine de l'algèbre européenne moderne: où Jacopo a-t-il trouvé son inspiration?

Éléments d'un portrait

Évidemment nous devons chercher une tradition algébrique dépourvue de démonstrations géométriques et dépourvue d'exemples basées sur l'avoir, la racine et les nombres, et définissant les cas et donnant les règles en forme non-normalisée.

Pour en savoir plus, nous pouvons décrire le contenu de l'algèbre de Jacopo en quelque détail.

L'algèbre propre décrit non pas 6 mais bien 20 cas:[10]

1.	$\alpha r = n$	4.	$\alpha C+\beta r = n$
2.	$\alpha C = n$	5.	$\beta r = \alpha C+n$
3.	$\alpha C = \beta r$	6.	$\alpha C = \beta r+n$
7.	$\alpha K = n$	14.	$\alpha CC = \beta r$
8.	$\alpha K = \beta r$	15.	$\alpha CC = \beta C$
9.	$\alpha K = \beta C$	16.	$\alpha CC = \beta K$
10.	$\alpha K+\beta C = \gamma r$	17.	$\alpha CC+\beta K = \gamma C$
11.	$\beta C = \alpha K+\gamma r$	18.	$\beta K = \alpha CC+\gamma C$
12.	$\alpha K = \beta C+\gamma r$	19.	$\alpha CC = \beta K+\gamma C$
13.	$\alpha CC = n$	20.	$\alpha CC+\beta C = n$

(*CC* représente *censo de censi*, c'est-à-dire *avoir d'avoirs*, la quatrième puissance de la racine; *K* signifie *cubo*, la troisième puissance).

Les cas 7–20 sont tous réductibles. Pour ces cas, seulement une règle est donnée (toujours correcte), pour les six cas fondamentaux aussi des exemples. Regardons-en quelques-uns:[11]

Cas (1), exemple *a:*

---

[10] Le texte parle de 15 cas supplémentaires. Le cas oublié doit être ou $\beta C = \alpha CC+n$, ou $\alpha CC = \beta C+n$.

[11] Je traduis de l'édition dans [Høyrup 2000].

Fais-moi de dix deux parties, de telle manière que, quand la majeure est divisée par la mineure, 100 résulte. Fais ainsi: mets que la majeure soit une chose. Maintenant la mineure sera le restant jusqu'à 10, ce qui sera 10 moins une chose. [...]. Maintenant on doit diviser la majeure par la mineure, c'est-à-dire une chose par 10 moins une chose, de quoi 100 doit résulter. En conséquence tu dois multiplier 100 par 10 moins une chose. Cela fait 1000 moins 100 choses, qui s'égalent à une chose. Maintenant restaures chaque membre, c'est-à-dire d'ajouter les 100 choses qui sont moins à chaque membre. [...].

Cas (1), exemple *b:*

Il y a trois partenaires qui ont gagné 30 livres. Le premier partenaire a mis 10 livres. Le second a mis 20 livres. Le troisième a mis tant que 15 livres le reviennent de ces gains. Je veux savoir combien le troisième a mis, et combien revient à chacun des deux autres partenaires. Fais ainsi: si nous voulons savoir ce que le troisième a mis, mets que le troisième ait mis une chose. [...] et tu auras qu'il y a trois partenaires, dont le premier met dans la compagnie 10 livres; le second mets 20 livres; le troisième met une chose. Donc le capital de la compagnie est 30 livres et une chose. Et ils ont gagné 30 livres. Maintenant, si nous voulons savoir combien de ces gains revient au troisième partenaire [...], tu dois multiplier une chose par ce qu'ils ont gagné, et diviser par tout le capital de la compagnie. En conséquence nous devons multiplier 30 par une chose; cela fait 30 choses, que tu dois diviser par le capital de la compagnie, c'est-à-dire par 30 et une chose, et ce qui résulte revient au troisième partenaire. En conséquence multiplies 15 par 30 et une chose. Cela fait 450 et 15 choses. 450 nombres et 15 choses égalent donc 30 choses. [...] . Restaure chaque membre, c'est-à-dire que tu dois enlever de chaque membre 15 choses. Et tu auras que 15 choses égalent 450 nombres. Et en conséquence tu dois diviser les nombres par les choses, c'est-à-dire 450 par 15, dont résulte 30. Et à tant s'élève la chose. Et nous avons mis que le troisième partenaire eût mis une chose, donc il résulte qu'il a mis 30 livres. [...] Et si tu veux savoir combien revient au premier et au second, on enlève de 30 livres les 15 qui reviennent au troisième. 15 livres restent. Et tu diras qu'il y a deux partenaire qui ont gagné 15 livres. Et le premier a mis 10 livres. Et le second a mis 20 livres. Combien revient à chacun? Fais ainsi et dis, 20 livres et 10 livres sont 30 livres, et cela est le capital de la compagnie. [...].

Cas (2):

Trouves-moi deux nombres qui sont en proportion[12] comme 2 à 3. Et si chacun est multiplié par soi-même, et une multiplication soustraite de l'autre, 20 resteront. Je veux savoir, quels sont ces nombres. Fais ainsi, et mets qu'un nombre soit 2 choses et l'autre soit 3 choses. [...].

Cas (4), exemple *b:*

Il y a deux hommes qui ont des deniers. Le premier dit au second, si tu me donnes 14 de tes deniers, j'aurai 4 fois plus que toi. Le second dit au premier, si tu me donnes la racine de tes deniers, j'aurai 30 deniers. [...].

Cas (5), exemple *b:*

[12] Ici et ailleurs, Jacopo dit «in propositione». Ceci est une des indications que son latin est celui d'un laïc, pas d'un maître de l'école latine ou de l'université.

> Quelqu'un fait deux voyages, et au premier voyage il gagne 12. Et au second voyage il gagne à la même raison que dans le premier. Et quand il a achevé ses voyages il trouve, sommant le capital et les gains, d'avoir 54. Je veux savoir avec combien il partit. Mets qu'il partît avec une chose, et dans le premier voyage il gagna 12. Quand le premier voyage était achevé il se trouvait donc avec une chose et 12. Tu vois donc clairement que de chaque chose il fait dans le premier voyage une chose et 12. Combien sera-t-il à cette même raison dans le deuxième voyage? Il te convient multiplier une chose et 12 par une chose et 12, ce qui fait un avoir et 24 choses et 144 nombres, qui selon la règle doit être divisés par une chose, et 54 doit en résulter. En conséquence, multiplies 54 par une chose. Cela fait 54 choses, qui égalent un avoir et 24 choses et 144 nombres. Restaures chaque membre, c'est-à-dire d'enlever 24 choses de chaque membre. Et tu auras que 30 choses sont égales à un avoir et 144 nombres. Divises par un avoir, le même résulte. Bissectes les choses, il reste 15. Multiplies par soi-même, cela fait 225. Retranches-en les nombres, qui sont 144, il reste 81. Trouve sa racine, qui est 9. Retranche-le du bissecté des choses, c'est-à-dire de 15. Il reste 6, et tant vaut la chose. Et nous disions qu'il partit avec une chose. Tu vois donc clairement qu'il partit avec 6. Et si tu veux le prouver, fais ainsi [...].
>
> On pourrait dire aussi[13] qu'il partit avec la racine du restant et plus le bissecté des choses, c'est-à-dire avec la racine de 81, qui est 9. Mets-le au-dessus de 15, cela fait 24. Et ainsi cela va bien dans un cas comme dans l'autre. Et voici la preuve [...]. Ainsi tu vois qu'une manière aussi bien que l'autre va bien. Et en conséquence la règle faite ainsi est très méritoire, qui nous donne deux réponses qui vont bien tous les deux. Mais souviens-toi que non tous les calculs qui se réduisent à cette règle peuvent avoir deux réponses, mais seulement certains d'eux. Et pour certains il te convient de prendre une réponse, et pour certains l'autre. [...]. Chaque fois que tu rencontres une telle équation (*raoguaglamento*), trouves d'abord une réponse. Et si elle ne te résulte pas vrai, on peut prendre l'autre sans aucun doute. Et tu auras la vraie réponse. [...].

Cas (5), exemple *c:*

> Fais-moi de 10 deux partis, ainsi que quand l'une est multipliée par l'autre et la différence y est ajoutée, cela fait 22. Je demande, combien sera chaque parti. Fais ainsi, mets qu'une parti soit une chose. [...].[14]

Ces extraits du textes se prêtent à toute un série d'observations.

Tout d'abord, l'emploi du mot «restauration» est inusité, pour dire le moins. Elle désigne non seulement le *jabr* de la tradition classique mais aussi le retranchement d'un terme additif des deux membres d'une équation. Apparemment le terme *al-muqābalah,* normalement expliqué comme retranchement des

[13] Le cas «avoirs et nombres égalent racines» est celui qui peut posséder deux solutions positives, ce qui en fait est explique dans la règle.

[14] Puisque le texte ne dit pas que la chose représente la partie mineure mais le présuppose dans le calcul de la différence (10 moins 2 choses), la solution par addition (la chose égale 6) se révèle fausse, ce qui illustre l'explication donné dans l'exemple précédent.

éléments additifs superflues (l'*opposition* des traités latins) est absent du texte. Mais les apparences ont de bonnes chances de tromper – au fait, dans les *Ragionamenti d'algebra* de Raffaello Canacci [éd. Procissi 1954: 302] nous lisons, dans un passage qui émanerait d'une traduction faite par Guglielmo de Lunis que *elmelchel* (voisin de *geber* dans le texte et donc sans doute *al-muqābalah*) signifie «exempio hovvero aghuaglamento», «exemple ou équation».[15]

Cette interprétation d'*al-muqābalah* est moins aberrante qu'on pourrait le croire. Dans le *Fakhrī*, al-Karajī la donne aussi [Woepcke 1853: 64], et nombre d'auteurs arabes utilisent le verbe *qabila* aussi bien pour la confrontation de deux expressions comme membres d'une équation que pour l'élimination d'une contribution additive (ainsi Abū Kāmil, ibn Badr et Abū Bakr auteur du *Liber mensurationum*[16]).

Comme le signale Saliba [1972], le sens originel du terme est probablement celui du *Fakhrī* et de Canacci. Jacopo, comme plus tards la source de Canacci, a donc dû être inspiré par un milieu où cet usage restait courant.

Deux autres observations liées entre elles peuvent être faites sur l'exemple (1*a*). D'abord il saute aux yeux que la règle de trois (dite aussi "des marchands") est appliquée comme un outil de base; ensuite nous voyons que la structure de la compagnie commerciale est utilisée comme modèle quasi-abstrait pour tout partage proportionnel. Ceci est une particularité distinctive du *Traité d'algorisme* de Jacopo (version **V**) qui retourne dans toutes ses parties. Des exemples isolés de la même pratique se trouvent dans quelques autres traités,[17] mais aucun

---

15 Dans le même passage nous lisons que *elchel* (un dérivé de *qāla*, «annuler», «rescinder», etc., je présume) veut dire «opposition», donc élimination de contributions identiques des deux membres; *elchelis* (de *qalaṣa*, «réduire» etc.) est la formation d'une des équations auxquelles les règles s'appliquent, qui effectivement se fait par élimination des contributions additifs et subtractifs superflues – et, le cas échéant, par normalisation. Trois autres termes (*elfatiar*, *difarelburan* et *eltiemen*) sont moins facilement identifiés.

16 En ce qui concerne Abū Kāmil, les passages énumérés sous la mot vedette *opponere* dans le glossaire de [Sesiano 1993: 441] le démontrent clairement. Pour Abū Bakr, il faut voir l'emploi du même mot dans la traduction latine [éd. Busard 1968]. L'usage d'ibn Badr est discuté dans [Sánchez Pérez 1916: 24 n. 1].

Bahā' al-Dīn explique que *muqābalah* [trad. Woepcke 1843: 41] désigne la cancellation de contributions identiques des deux membres de l'équation; pourtant, dans l'exposition des procédures (par exemple p. arabe 49) il utilise parfois dans cette fonction *isqāt*, «déduction», dérivé du verbe *saqata*.

17 Je connais trois exemples italiens, dont au moins deux dépendent de Jacopo [Høyrup 2001: ???]. Un quatrième exemple se trouve dans l'Algorisme de Pamiers, un traité provençal du quinzième siècle [éd. Sesiano 1984: 47].

d'eux l'utilise en mode systématique. L'une caractéristique aussi bien que l'autre indique que Jacopo a tiré son inspiration d'un milieu fortement orienté vers l'éducation des commercants – indication qui évidemment n'est pas contredite par la choix d'exemples prise de la vie présumée «vraie»: les compagnies commerciales, les voyages marchands, les prêts à intérêt composé (exemple 4*a*), l'échange des monnaies (exemple 6*a*). Seul l'anecdote de (4*b*) sur les dons réciproques est trop répandue dans le temps et dans l'espace pour être très informatif, même s'il suggère lui aussi que l'inspiration de Jacopo aura traité l'algèbre comme partie intégrée des mathématiques «de la vie sociale», les mathématiques *muʿāmalāt*.

Cette intégration de l'algèbre avec les mathématiques *muʿāmalāt* distingue Jacopo de la tradition «classique». Dans la partie algébrique du traité d'al-Khwārizmī, un seul problème peut être défini de type *muʿāmalāt* – un montant d'argent divisé d'abord entre un certain nombre *n* d'hommes, après entre *n*+1 hommes [éd. Hughes 1986: ???]. Ce type se retrouve dans le *Liber abbaci* en plusieurs variantes [éd. Boncompagni 1857: 413–415]. À part ceux-là, un problème [*ibidem* p. 415] traite de l'achat de choses non identifiés, et un [*ibidem* p. 425] de transactions commerciales produisant des gains. Évidemment, dans les chapitres précédents il y a un nombre immense de problèmes *muʿāmalāt*, quelques-uns résolus par moyen de la *regula recta* et donc utilisant le *res*, «la chose», mais ceux-là ne comptent pas comme algèbre dans le livre.

Ibn Badr est plus similaire à Jacopo. Apres les six problèmes illustrant les six cas fondamentaux, il groupe ses exemples: il y a des dizaines de problèmes sur le «dix divisé» et sur les avoirs et leurs racines; mais il y en a aussi sur la rémunération d'un capital (3 problèmes), sur les dots (4), sur le mélange des grains (4), sur la distribution d'un butin entre soldats (3), sur les voyages de courriers (3), sur les dons réciproques et la «bourse trouvé» (4).

Chez Bahāʾ al-Dīn, le chapitre sur l'algèbre contient six exemples, un pour chaque cas fondamental. De ceux-ci, quatre sont de type *muʿāmalāt*, et deux traitent de nombres abstraits. Un chapitre ultérieur contient neuf problèmes qui sont résolubles par plusieurs méthodes; six d'entre eux appartiennent à des types «de récréation» connus depuis l'*Anthologie grecque*; ils sont donc de type *muʿāmalāt* au même titre que l'exemple (4*b*) de Jacopo.

L'exemple (4*b*) de Jacopo est intéressant à un autre égard: la présence de la racine carré d'argent vrai.

Évidemment, les problèmes d'avoir et de racine traitent formellement d'argent, ce qui s'accorde très bien avec le fait que les «nombres» des problèmes sont des dirhams dans les textes arabes. Il est vrai qu'al-Khwārizmī aussi bien qu'Abū Kāmil après avoir trouvé la racine trouvent encore le *māl* (Abū Kāmil indique même comment le trouver directement); pour eux, le *māl* reste donc une inconnue indépendante. Mais leur introduction du *māl* comme le produit de la racine avec soi-même montre que la racine (identifiée avec la *šay'*, la chose) était bien devenu l'inconnue de base. Le fait que le cas (2) est présenté par eux en forme normalisée le fait voir aussi: si le *māl* était l'inconnue propre, l'équation normalisée aurait été sa propre solution, et elle aurait dû être remplacée par la forme non-normalisée, comme dans le cas (3).

Une racine carrée d'argent vrai ne se trouve pas dans l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī, ni, si je me souviens bien, chez Abū Kāmil ou dans le *Liber abbaci*.[18] Mais dans le *Liber mahamaleth*, composition latine produite en Castille durant la seconde moitié du douzième siècle, on trouve au moins deux exemples;[19] de même, le traité d'ibn Badr, dans une section sur les dots, traite deux cas qui parlent de la racine carré d'un dot.

Dans les traités indiens, par exemple le *Ganita-sāra-saṅgraha* de Mahāvīra [éd., trad. Raṅgācārya 1912], les racines carrés des grandeurs concrètes – les abeilles d'un essaim, les flèches tirés par Arjuna, les éléphants d'une horde, etc. – sont abondants.

Cinq des exemples de Jacopo sont déguisés en problèmes *muᶜāmalāt*. Les cinq autres sont des problèmes numériques pures. Trois d'entre ceux-là sont du type «dix divisé», bien représenté chez al-Khwārizmī et dans le *Liber abbaci* (et ailleurs). Mais les exemples de Jacopo sont élémentaires en comparaison avec ceux des autres traités; on peut soupçonner qu'ils remontent à un fonds originel exploité et amplement augmenté par al-Khwārizmī et les autres membres de la tradition

---

[18] Le voisin le plus proche dans le *Liber abbaci* semble être un problème numérique du type «10 divisé» [éd. Boncompagni 1857: 451*ff*], où la partie mineure plus deux de ses racines doit égaler la partie majeure moins 2 de ses racines (solution 10 = 1+9). Un problème sur deux «quantités» indéterminés et leurs racines carrées [*ibidem* p. 446] pourrait aussi être une traduction d'un problème concret. Le groupe qui parle d'un *avere* et ses racines [*ibidem* pp. 433, 442, 443 (2 problèmes), 444 (3), 445 (4), 446] devrait toutefois être l'issue d'une traduction inhabituelle de *māl* (la traduction normale de Léonard, comme de Gérard et du traducteur du *Liber augmentis et diminutionis*, est *census*).

L'apparition d'un terme italien dans le texte latin du *Liber abbaci* (et de *causa* dans le *Flos* [éd. Boncompagni 1862: 236], évidemment une traduction latine de la *cosa* italienne) représente un autre défi à l'histoire conventionnelle du début de l'algèbre européen. *Qui* a parlé d'algèbre en italien avant Léonard, sans laisser aucune trace hors des écrits de celui-ci? Pour le moment je n'ai aucune réponse.

[19] Les racines carrées d'un capital et d'un profit, fol. 160^v, et d'un salaire, fol. 172^v; voir [Sesiano 1988: 80, 83].

«haute». Les questions sur deux nombres en proportion donnée (1*a* et encore 2*a*), en échange, semblent être hors de toute tradition. Rien de similaire se trouve chez al-Khwārizmī ou chez Léonard, ni chez ibn Badr ou Bahā' al-Dīn. On serait tenté d'y voir une innovation, due sinon à Jacopo au moins à un précurseur assez proche.

Ces observations ne nous donnent aucune réponse précise sur la tradition-source de Jacopo. On peut dire, pourtant, qu'elles semblent exclure non seulement les écrits latins mais aussi que la «haute» tradition arabe descendant d'al-Khwārizmī et d'Abū Kāmil ait joué un rôle central. Tout suggère que son inspiration vient d'un milieu similaire à l'école d'abaque, c'est-à-dire un enseignement pour les marchands et leurs employés, pour les collecteurs d'impôts et les autres administrateurs publics, etc.; que ce qu'on y enseignait était lié aux traditions «sous-scientifiques» portés par les mathématiciens-praticiens depuis l'antiquité classique et embrassant l'univers indien aussi bien que le monde méditerranéen; et que son algèbre était proche au type pré-al-Khwārizmien.[20]

Où?

À ces caractéristiques de la source de Jacopo il faut ajouter encore quelque chose. Son traité ne contient pas un seul arabisme. Il est donc exclu qu'il ait traduit directement de l'arabe; loin de cela, il a dû prendre ses matériaux d'un lieu où l'on parlait une langue assez proche à la sienne.

Puisque Jacopo écrit en Montpellier, la Provence semble être la conjecture plus naturelle, avec l'Italie comme deuxième possibilité. En ce qui concerne l'algèbre, pourtant, de bonnes raisons nous forcent à abandonner ces hypothèses commodes.

Ces raisons ont à voir avec ce qui se passe durant les décennies après 1307. En 1328, un certain Paolo Gherardi, également à Montpellier, écrit un *Libro de ragioni* [éd. Arrighi 1987] qui lui aussi contenait un chapitre sur l'algèbre.[21]

---

[20] À en juger par certaines formulations précises, ibn al-Bannā' et al-Qalasādī appartiennent à la tradition «haute». Il semble qu'une caractéristique de l'algèbre du courant «bas» (et de l'*al-jabr* pré-al-Khwārizmien) soit l'absence de démonstrations géométriques; toutefois, il ne s'agit pas là d'une caractéristique exclusive: dans des abrégés comme ceux d'ibn al-Bannā' et d'al-Qalaṣādī ils disparaissent aussi.

Évidemment, toute distinction entre un (seul) courant «haut» et un (seul) courant «bas» est une approximation – durant les siècles, toutes sortes d'emprunts seront survenus, particulièrement dans la phase dite «d'islamisation» par A. I. Sabra [1987]. Mais l'énigme de l'origine de l'algèbre de Jacopo suggère que l'approximation n'est pas trop grossière.

[21] Publié et traduit séparément par Warren Van Egmond [1978].

De première vue, ce chapitre ressemble beaucoup à celui de Jacopo, les différences plus importantes étant l'absence chez Paolo Gherardi de règles pour les problèmes du quatrième degré, la présence de règles pour plusieurs cas irréductibles du troisième degré (calqués sur des cas similaires du second degré, et bien entendu fausses), et la présence d'exemples pour toutes les règles du troisième degré. Sans exception, ces exemples sont du type «trouver deux ou trois nombres en proportions données»[22] – un type qui au fait permet de construire des exemples sur mesure sans grands efforts intellectuels. Dans tous les cas irréductibles, les solutions trouvés contiennent des racines carrées, ce qui a pratiquement empêché le contrôle.

L'analyse de trois autres traités révèlent la relation précise entre l'algèbre de Jacopo et celui de Paolo Gherardi. Deux se trouvent dans un même codex publié par Gino Arrighi [1973], écrite par plusieurs mains différents aux environs de 1330, probablement à Lucca; un chapitre (**L**) porte le titre «Le reghole dell'aligibra amichabile», un autre partiellement identique est intitulé «Le reghole della chosa con asempri» (**C**). Le troisième (**A**) fait partie d'un *Trattato dell'alcibra amuchabile* d'environ 1365, publié par Annalisa Simi [1994].

Les relations entre les cinq traitements de l'algèbre ressortiront du schéma suivant (**V** représente Jacopo, **G** Paolo Gherardi):

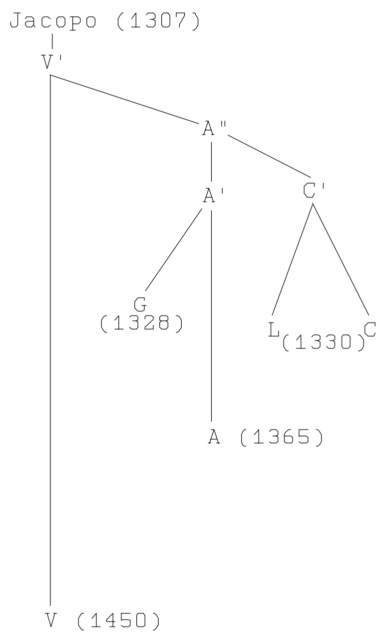
Cas	**V**	**G**	**L**	**C**	**A**
$\alpha r = n$	1.R,E_{12},n	1.R,E_{1*},n	1.R,E_{1},n	1.R,E_{1*},**p**	1.R,E_{12},n
$\alpha C = n$	2.R,E_{1},**p**	2.R,E_{2},n	2.R,E_{2},n	2.R,E_{2*},n	2.R,E_{1},**p**
$\alpha C = \beta r$	3.R,E_{1},**p**	3.R,E_{1*},n	3.R,E_{1*},**p**	3.R,E_{2},**p**	3.R,E_{1},**p**
$\alpha C+\beta r = n$	4.R,E_{12},n	4.R,E_{1*},n	4.R,E_{1*},n	4.R,E_{1**},n	4.R,E_{12},n
$\beta r = \alpha C+n$	5.R,E_{123},n	5.R,E_{2*},n	5.R,E_{2**},**p**	5.R,E_{2***},n	5.R,E_{123},n
$\alpha C = \beta r+n$	6.R,E_{1},n	6.R,E_{2},n	6.Oublié	6.R,E_{3},n	6.R,E_{1},n
$\alpha K = n$	7.R,**p**	7.R,E_{1},**p**	7.R,n	7.R,**p**	7.R,E_{1},**p**
$\alpha K = \beta r$	8.R,**p**	9.R,E_{1},**p**	8.R,n	8.R,**p**	8.R,E_{1},**p**
$\alpha K = \beta C$	9.R,**p**	10.R,E_{1},**p**	9.R,**p**	9.R,**p**	9.R,E_{1},**p**
$\alpha K+\beta C = \gamma r$	10.R,n	15.R,E_{1},n	10.R,**p**	14.R,n	15.R,n
$\beta C = \alpha K+\gamma r$	11.R,n		11.R,n	15.R,n	16.R,n
$\alpha K+\gamma r = \beta C$					14.R,E_{1},n
$\alpha K = \beta C+\gamma r$	12.R,n	11.R,E_{1},n	12.R,n	16.R,**p**	10.R,E_{1},n
$\alpha K = \sqrt{n}$		8.R,E_{1},**p**			11.R,E_{1},**p**
$\alpha K = \beta r+n$		12.X,E_{1},n			12.X,E_{1},n

[22] Avec la variante «trouver deux nombres, dont l'un soit telle part de l'autre comme *m* de *n*».

$\alpha K = \beta C+n$		13.X,E_1,n			13.X,E_1,n
$\alpha K = \gamma r+\beta C+n$		14.X,E_1,n			
$\alpha CC = n$	13.R,n		13.R,**p**	11.R,**p**	17.R,n
$\alpha CC = \beta r$	14.R,**p**			12.R,**p**	18.R,**p**
$\alpha CC = \beta C$	15.R,**p**			13.R,**p**	19.R,**p**
$\alpha CC = \beta K$	16.R,**p**			10.R,**p**	20.R,**p**
$\alpha CC+\beta K = \gamma C$	17.R,n				21.R,n
$\beta K = \alpha CC+\gamma C$	18.R,n				22.R,n
$\alpha CC = \beta K+\gamma C$	19.R,n				23.R,n
$\alpha CC+\beta C = n$	20.R,n				24.R,n

Si une règle est présente pour un certain cas, cela est marqué par R si la règle est bonne, et par X si elle est fausse. La présence d'un exemple est indiquée E (E_{12} si deux exemples sont présents; E_1 et E_2 dans une même ligne indiquent des exemples différents, E_1 et E_{1*} que les exemples diffèrent seulement par leurs paramètres numériques; *CC* représente *censo de censi*, *K* signifie *cubo*, *C censo*, *r* la chose. Les lettres «p» et «n» indiquent, respectivement, que la normalisation est exprimée comme «partire per» et comme «partire in». Puisque ce dernier trait ne comporte aucune conséquence mathématique, ni ne possède aucune autre importance, il est un indicateur de descendance très efficace.

Je ne répéterai pas l'analyse détaillée du schéma, qui se trouvera en [Høyrup 2001]; le résultat de l'analyse peut s'exprimer dans le stemma ci-contre. Là, **V´** est l'archétype commun de tous les traités, peut-être identique à l'autographe de Jacopo, peut-être une copie; puisqu'aucun des cas $\beta C = \alpha CC+n$ et $\alpha CC = \beta C+n$ n'est présent dans *A*, on doit présumer que le cas oublié en **V** (voir note 10) était déjà absent de **V´**. **A´´** sera le précurseur commun de **A**, **G**, **L** et **C**, contenant seulement les cas réductibles (les seuls à paraître dans **L** et **C**, donc aussi dans leurs précurseur commun immédiat **C´**). **A´** est un précurseur commun de **A** et **G**, très fidèle à Jacopo dans les parties prises de lui (puisque cela vaut pour **A** – voir les exemples et la distribution des «n» et «p») mais déjà contenant des règles fausses et des exemples pour les cas irréductibles du troisième degré (à peu près identiques dans **A** et **G**).



Aucun autre algèbre italien n'est connu qui soit à dater avant 1340 (mis à part le fantôme où Léonard a trouvé le terme *avere*), ce qui devrait exclure l'existence d'une tradition en Italie où Jacopo aurait pu trouver ses matériaux. En plus, tout ce dans le traité de Paolo Gherardi qui dépasse Jacopo vient d'une source (**A´**) qui, au moins quant à la langue mais probablement aussi selon la géographie était italienne et non pas provençale). Même à Montpellier on peut donc exclure l'existence d'une tradition vive qui aurait pu fournir Jacopo en savoir algébrique.

Abandonnées les hypothèses de l'Italie et de la Provence, où dans le monde latin Jacopo aura-t-il pu trouver son algèbre? La seule réponse possible – malheureusement supporté sur aucune évidence directe si mince qu'elle soit – semble être la région catalane. Un appui indirect vient toutefois du fait que la Catalogne du treizième siècle avait des rapports commerciales très intenses avec le monde arabe, en particulier avec l'Égypte. L'hypothèse est favorisé en outre par l'existence d'une tradition similaire à celle des écoles d'abaque dans l'aire provençal-catalan dans le quinzième siècle, jusqu'ici expliqué comme un emprunt de l'Italie mais caractérisée aussi par l'emploi du titre «algorisme».[23]

Amplifiant l'énigme

Reste alors à se demander si la «Catalogne» hypothétique avait atteint un tel niveau mathématique qu'elle a pu produire par ses propres forces certaines choses étonnantes qui se trouvent dans l'algèbre de Jacopo, plus précisément dans un chapitre suivant qui de notre point de vue traite encore de problèmes de type algébrique (et qui est encore absent de **F** et **M**).

Ces problèmes, quatre en tous, roulent sur le salaires du gérant d'un *fondaco,* une factorerie (de l'arabe *funduq*). Le texte présuppose mais ne l'explique pas que le salaire annuel monte en série géométrique. Si s_n désigne le salaire à l'an n, les donnés sont les suivants:

(1) $s_1+s_3 = 20$, $s_2 = 8$
(2) $s_1 = 15$, $s_4 = 60$
(3) $s_1+s_4 = 90$, $s_2+s_3 = 60$
(4) $s_1+s_3 = 20$, $s_2+s_4 = 30$

Toutes les solutions données sont valables, y compris celui du numéro (3), un problème irréductible du troisième degré. Les solutions présupposent des connaissances de l'algèbre des polynômes et de la théorie des proportions continues,[24] mais aussi la solution «sans règle [d'*al-jabr*]» du problème que la somme et le produit de deux nombres (ou l'aire et la somme des deux côtés d'un

23 Voir [Cassinet 1993] (pour le mot «algorisme» dans le titre, p. 253), et [Sesiano 1984] («algorisme» p. 31).

24 Voir le texte et l'analyse dans [Høyrup 2000: 45–51].

rectangle) sont donnés, c'est-à-dire la solution trouvé par exemple dans le *Liber mensurationum* d'Abū Bakr. Tout bien considéré il semble que ces connaissances ont pu se trouver ensemble seulement quelque part dans le monde arabe s'où la «Catalogne» a dû apprendre son algèbre. Pour en savoir plus il faut trouver une ambiance où circulaient des énigmes mathématiques basées sur la présupposition que la croissance non spécifiée d'un salaire sera en série géométrique.

(En absence de) conclusions

L'analyse précédente permet quelques conclusions négatives. D'abord elle démontre sans un ombre de doute que le début de «l'algèbre d'abaque» doit peu ou rien aux prédécesseurs latins. Ensuite elle indique que l'inspiration pour ce début ne vient pas des traditions algébriques du monde arabe jusqu'ici examinés à fond par les historiens.

Mais les conclusions sûres s'arrêtent là, et à ce point commencent les demandes: quelles étaient les institutions dans le monde arabe de l'époque qui traitaient l'algèbre comme partie intégrée des mathématiques *muʿāmalāt*? Quelles étaient les traditions algébriques invisibles dans les sources qui nous sont familiers, donc les traditions considérées «basses» dans la topographie morale des savants, et quel était le savoir porté par eux mais pas intégré dans le savoir «haut»? Quelles étaient les relations entre «haut» et «bas»? Et cetera, et cetera. Et, de l'autre côté du clivage religieux: Serait-ce vraiment impossible de trouver des traces des précurseurs de Jacopo et des «pratiques d'algorisme» catalanes-provençales?

– les demandes du fou exaspèrent la sagesse de dix savants –

Références

Arrighi, Gino, 1967. "Un «programma» di didattica di matematica nella prima metà del Quattrocento (dal Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze)". *Atti e memorie dell'Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze di Arezzo,* Nuova Serie **38** (1965–67), 117–128.

Arrighi, Gino (ed.), 1973. *Libro d'abaco.* Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca Statale di Lucca. Lucca: Cassa di Risparmio di Lucca.

Arrighi, Gino (ed.), 1987. Paolo Gherardi, *Opera mathematica: Libro di ragioni – Liber habaci*. Codici Magliabechiani Classe XI, nn. 87 e 88 (sec. XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze. Lucca: Pacini-Fazzi.

Boncompagni, Baldassare (ed.), 1857. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. I. Il *Liber abaci* di Leonardo Pisano. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Boncompagni, Baldassare (ed.), 1862. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. II. *Practica geometriae* et *Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Busard, H. L. L., 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le «Liber mensurationum» d'Abû Bekr". *Journal des Savants,* Avril-Juin 1968, 65–125.

Cassinet, Jean, 1993. "Le manuscrit XXVI de Cesena. Important maillon occitan de transmission de l'algorisme au 15ème siècle". *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* **13**, 251–285.

Djebbar, A., 1981. *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIe-XIVe siècles (étude partielle).* (Publications mathématiques d'Orsay, 81–02). Orsay: Université de Paris-Sud.

Djebbar, A., 1988. "Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman", pp. 101–123 *in Histoire des Mathématiques Arabes*. Premier colloque international sur l'histoire des mathématiques arabes, Alger, 1.2.3 décembre 1986. Actes. Alger: La Maison des Livres.

Hochheim, Adolph (ed., trans.), 1878. *Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik)* des Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhi. I-III. Halle: Louis Nebert.

Høyrup, Jens, 1998. "»Oxford« and »Cremona«: On the Relations between two Versions of al-Khwārizmī's *Algebra*", pp. 159–178 *in Actes du 3me Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, Tipaza (Alger, Algérie), 1–3 Décembre 1990,* vol. II. Alger: Association Algérienne d'Histoire des Mathématiques.

Høyrup, Jens (ed., trans.), 2000. Jacobus de Florentia, *Tractatus algorismi* (1307), the chapter on algebra (Vat. Lat. 4826, fols 36v–45v). *Centaurus* **42**, 21–69.

Høyrup, Jens, 2001. "The Founding of Italian Vernacular Algebra", pp. 129–156 *in Commerce et mathématiques du moyen âge à la renaissance, autour de la Méditerranée*. Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13–16 mai 1999). Toulouse: Éditions du C.I.S.H.O.

Hughes, Barnabas, O.F.M., 1986. "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's *Al-Jabr*: A Critical Edition". *Mediaeval Studies* **48**, 211–263.

Luckey, Paul, 1941. "T̲ābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen". *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* **93**, 93–114.

Mušarrafa, ʿAlī Muṣṭafī, & Muḥammad Mursī Aḥmad (eds), 1939. al-Khwārizmī, *Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābalah.* Caïro.

Nesselmann, G. H. F. (ed., trans.), 1843. Mohammed Beha-eddin ben Alhossain aus Amul, *Essenz der Rechenkunst*, arabisch und deutsch. Berlin: Reimer.

Procissi, Angiolo (ed.), 1954. “I Ragionamenti d’Algebra di R. Canacci”. *Bollettino Unione Matematica Italiana*, serie III, **9**, 300–326, 420–451.

Raṅgācārya, M. (ed., trans.), 1912. The *Gaṇita-sāra-sangraha* of Mahāvīrācārya with English Translation and Notes. Madras: Government Press.

Rashed, Roshdi, & Ahmed Djebbar (eds), 1981. *L’oeuvre algébrique d’al-Khayyām*. Établie, traduite et analysée. (Sources and Studies in the History of Arabic Mathematics, 3). Aleppo: University of Aleppo, Institute for the History of Arabic Science.

Sabra, A. I., 1987. “The Appropriation and Subsequent Naturalization of Greek Science in Medieval Islam: A Preliminary Statement”. *History of Science* **25**, 223–243.

Saliba, George A., 1972. “The Meaning of al-jabr wa’l-muqābalah”. *Centaurus* **17** (1972-73), 189–204.

Sánchez Pérez, José A. (ed., trans.), 1916. *Compendio de algebra de Abenbéder*. Texto arabo, traduccion y estudio. (Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, 47). Madrid: Centro de Estudios Históricos.

Sayılı, Aydın, 1962. *Abdülhamid ibn Türk’ün katışık denklemlerde mantıkî zaruretler adlı yazısı ve zamanın cebri (Logical Necessities in Mixed Equations by ʿAbd al Ḥamîd ibn Turk and the Algebra of his Time)*. (Publications of the Turkish Historical Society, Series VII, N° 41). Ankara: Türk Tarih Kurumu Basımevi.

Sesiano, Jacques, 1984. “Une arithmétique médiévale en langue provençale”. *Centaurus* **27**, 26–75.

Sesiano, Jacques, 1988. “Le Liber Mahamaleth, un traité mathématique latin composé au XIIe siècle en Espagne”, pp. 69–98 *in Histoire des Mathématiques Arabes*. Premier colloque international sur l’histoire des mathématiques arabes, Alger, 1.2.3 décembre 1986. Actes. Alger: La Maison des Livres.

Sesiano, Jacques (ed.), 1993. “La version latine médiévale de l’Algèbre d’Abū Kāmil”, pp. 315–452 *in* M. Folkerts & J. P. Hogendijk (eds), *Vestigia Mathematica. Studies in Medieval and* Early Modern Mathematics in Honour of H. L. L. Busard. Amsterdam & Atlanta: Rodopi.

Simi, Annalisa (ed.), 1994. Anonimo (sec. XIV), *Trattato dell’alcibra amuchabile* dal Codice Ricc. 2263 della Biblioteca Riccardiana di Firenze. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 22). Siena: Servizio Editoriale dell’ Università di Siena.

Simi, Annalisa, 1995. “Trascrizione ed analisi del manoscritto Ricc. 2236 della Biblioteca Riccardiana di Firenze”. *Università degli Studi di Siena, Dipartimento di Matematica. Rapporto Matematico* N° 287.

Souissi, Mohamed (ed., trans.), 1969. Ibn al-Bannāʾ, *Talkhīṣ aʿmāl al-ḥisāb*. Texte établi, annoté et traduit. Tunis: L’Université de Tunis.

Souissi, Mohammed, 1983. “Ibn al-Yāsamīn, savant mathématicien du Maghrib”, pp. 217–225 *in Actas del IV Coloquio Hispano-Tunecino* (Palma, Majorca, 1979). Madrid: Instituto Hispano-Arabe de Cultura.

Souissi, Mohamed (ed., trans.), 1988. Qalaṣādī, *Kašf al-asrār ʿan ʿilm ḥurūf al-gubār*. Carthage: Maison Arabe du Livre.

Van Egmond, Warren, 1978. “The Earliest Vernacular Treatment of Algebra: The *Libro di ragioni* of Paolo Gerardi (1328)”. *Physis* **20**, 155–189.

Van Egmond, Warren, 1980. *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*. (Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze. Monografia N. 4). Firenze: Istituto e Museo di Storia della Scienza.

Woepcke, Franz, 1853. *Extrait du Fakhrî, traité d’algèbre* par Aboû Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî; *précédé d’un mémoire sur l’algèbre indéterminé chez les Arabes*. Paris: L’Imprimerie Impériale.